

OPOSICIONES SECUNDARIA MATEMÁTICAS

Murcia 2025

Problema 1. Calcular el siguiente límite donde $n \in \mathbf{N}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$$

Expresamos la suma parcial de n términos de forma compacta:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

Observamos que para todo $k = 1, 2, \dots, n$ se cumple:

$$n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n \Rightarrow \sqrt{n^2+1} \leq \sqrt{n^2+k} \leq \sqrt{n^2+n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

Entonces, sumando n términos, se obtiene la doble desigualdad:

$$n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq S_n \leq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

Calculamos ahora los límites de los extremos cuando $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1 \end{aligned}$$

Por el teorema del sándwich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \boxed{1}$$

Problema 2. Sea $a \neq 0$ un número real dado. Sabiendo que x_1, x_2, x_3 son las raíces de un polinomio de tercer grado, determinar todas las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{a} \end{cases}$$

Solución: Sabemos que las raíces x_1, x_2, x_3 son de un polinomio de tercer grado, así que podemos usar las relaciones de Cardano-Vieta. Si el polinomio es $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ entonces

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= -p \\x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= q \\x_1x_2x_3 &= -r\end{aligned}$$

La segunda ecuación se reescribe como:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} = -\frac{q}{r}$$

Por lo tanto,

$$-\frac{q}{r} = \frac{1}{a} \implies r = -qa$$

El polinomio característico es:

$$P(x) = x^3 - ax^2 + qx - qa$$

Comprobamos que $x = a$ es raíz:

$$P(a) = a^3 - aa^2 + qa - qa = 0$$

Dividimos el polinomio por $(x - a)$:

$$x^3 - ax^2 + qx - qa = (x - a)(x^2 + q)$$

Por tanto, el factor cuadrático es $x^2 + q$ y las raíces son:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 = -b$$

donde $b^2 = -q$.

Se deduce que si $q < 0$ entonces las raíces x_2 y x_3 serán reales, si $q = 0$ serán ambas 0 y serán complejas imaginarias puras si $q > 0$.

Comprobamos que se satisface la primera ecuación (suma de raíces):

$$x_1 + x_2 + x_3 = a + b - b = a$$

Y también la segunda (suma de inversos):

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{-b} = \frac{1}{a}$$

Finalmente, las soluciones del sistema son

$$(x_1, x_2, x_3) = (a, b, -b), \quad \text{con } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C}$$

y todas sus permutaciones, por la simetría que presentan ambas ecuaciones.

Problema 3. Resuelve la integral definida

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$$

Solución: Observamos que $\ln(x)$ no está definida en $x = 0$, y que $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ tiende a $-\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$, así que tratamos la integral como impropia:

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$$

Resolvemos esta integral por partes:

$$\begin{aligned} u = \ln(x) &\Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^{-1/2} dx &\Rightarrow v = 2\sqrt{x} \end{aligned}$$

Aplicamos la fórmula de integración por partes:

$$\int \ln(x) \cdot x^{-1/2} dx = 2\sqrt{x} \cdot \ln(x) - \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} dx$$

Simplificamos el segundo término:

$$\int 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 4\sqrt{x}$$

Entonces,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x} \cdot \ln(x) - 4\sqrt{x}]_{\varepsilon}^1$$

Evaluamos los extremos:

- En $x = 1$:

$$2\sqrt{1} \cdot \ln(1) - 4\sqrt{1} = 0 - 4 = -4$$

- En $x = \varepsilon$, tomamos el límite:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2\sqrt{\varepsilon} \cdot \ln(\varepsilon) - 4\sqrt{\varepsilon})$$

El primer sumando es una indeterminación de tipo $0 \cdot \infty$. Transformamos en $\frac{\infty}{\infty}$ y resolvemos por L'Hopital

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{\varepsilon} \ln(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\varepsilon)}{1/\sqrt{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1/\varepsilon}{-1/(2\sqrt{\varepsilon}^3)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sqrt{\varepsilon} = 0$$

Luego

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2\sqrt{\varepsilon} \cdot \ln(\varepsilon) - 4\sqrt{\varepsilon}) = 0$$

y tenemos

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx = -4 - 0 = \boxed{-4}$$

Problema 4. Dados tres puntos distintos $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ y $C(x_3, y_3, z_3)$ y no equidistantes, ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de A , B y C ? Siendo $A(2, -1, 0)$, $B(0, 1, 2)$, $C(-1, 2, 4)$ hallar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de A , B y C .

Solución: Si los puntos fueran colineales entonces los planos mediadores (o mediatrices en el plano) de los segmentos formados por los tres puntos tomados dos a dos serían paralelos, luego intersectarían teóricamente en el infinito y el lugar geométrico sería el conjunto vacío. Por lo tanto, consideraremos en adelante que los puntos no son colineales.

El conjunto de puntos que equidistan de dos puntos A y B es el plano mediador del segmento AB . Así, el conjunto de puntos que equidistan de A , B y C es la intersección de los planos mediadores de los segmentos AB , AC y BC .

Cuando los puntos A , B y C son no alineados y consideramos el plano que los contiene, el punto que equidista de los tres es el circuncentro del triángulo ABC . En el espacio, los planos mediadores se intersectan en una recta perpendicular al plano del triángulo ABC que pasa por su circuncentro y este es el lugar geométrico que buscamos.

Basta intersectar dos de los tres planos mediadores, ya que la recta resultante estará contenida en el tercer plano mediador, dado que tres mediatrices concurren en un único punto (circuncentro) y, por lo tanto, tres planos mediadores concurrirán en una recta.

Calculamos el plano mediador del segmento AB :

- Punto medio de AB (contenido en el plano mediador):

$$M_{AB} = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = (1, 0, 1)$$

- Vector director AB , que es normal al plano mediador: $\vec{AB} = (-2, 2, 2)$

La ecuación del plano mediador de AB es:

$$(-2)(x-1) + 2y + 2(z-1) = 0 \Rightarrow x - y - z = 0 \quad (1)$$

Calculamos el plano mediador del segmento BC :

- Punto medio de BC , contenido en el plano mediador:

$$M_{BC} = \left(\frac{0+(-1)}{2}, \frac{1+2}{2}, \frac{2+4}{2} \right) = (-1/2, 3/2, 3)$$

- Vector director AC , que es normal al plano mediador: $\vec{BC} = (-1, 1, 2)$

La ecuación del plano mediador de BC es:

$$(-1)(x + 1/2) + (y - 3/2) + 2(z - 3) = 0 \Rightarrow -x + y + 2z = 8 \quad (2)$$

Intersectamos dichos planos:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x + y + 2z = 8 \end{cases} \Rightarrow z = 8, \quad x = y + 8$$

Entonces el lugar geométrico buscado es la recta:

$$(x, y, z) = (t + 8, t, 8) = (8, 0, 8) + t(1, 1, 0), \quad t \in \mathbb{R}$$

Una forma alternativa de resolver el problema habría sido intersectar los tres planos genéricos que contienen a los segmentos AB , AC y BC , respectivamente.

Problema 5. Sean A, B, C tres sucesos independientes en un espacio de probabilidad (Ω, S, P) . Demostrar que sus complementarios $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ también son independientes.

Demostración. Recordamos que tres sucesos A, B, C son independientes si se cumple:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B), \\ P(A \cap C) &= P(A) \cdot P(C), \\ P(B \cap C) &= P(B) \cdot P(C), \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C). \end{aligned}$$

Queremos probar que los sucesos $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ son también independientes, es decir, verificar que:

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}), \\ P(\bar{A} \cap \bar{C}) &= P(\bar{A}) \cdot P(\bar{C}), \\ P(\bar{B} \cap \bar{C}) &= P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}), \\ P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) &= P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}). \end{aligned}$$

Probaremos la última condición usando la siguiente propiedad:

$$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \overline{A \cup B \cup C}$$

Por lo tanto

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$$

Utilizando la fórmula de inclusión-exclusión:

$$\begin{aligned}P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(A)P(C) - P(B)P(C) + P(A)P(B)P(C)\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) &= 1 - [P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(A)P(C) - P(B)P(C) + P(A)P(B)P(C)] \\&= (1 - P(A))(1 - P(B))(1 - P(C)) \\&= P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C})\end{aligned}$$

De forma análoga se prueba que

$$\begin{aligned}P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}), \\P(\overline{A} \cap \overline{C}) &= P(\overline{A}) \cdot P(\overline{C}), \\P(\overline{B} \cap \overline{C}) &= P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}),\end{aligned}$$

□