

OPOSICIONES SECUNDARIA MATEMÁTICAS

Comunidad Valenciana 2025

TIEMPO MÁXIMO: 4 horas.

1. (10 puntos)

Sea P_n el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n , junto con el polinomio cero, con coeficientes reales. Se considera la aplicación definida por

$$\begin{aligned} f : P_n &\rightarrow P_{n+1} \\ P(x) &\mapsto f(P(x)) = e^{x^2} \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} P(x) \right) \end{aligned}$$

donde $\frac{d}{dx}$ representa la derivada con respecto a x .

- (a) (4 puntos) Demostrar que la aplicación f es lineal.
- (b) (2 puntos) Hallar el núcleo de f .
- (c) (2 puntos) Hallar la dimensión de la imagen de f .
- (d) (2 puntos) Determinar la matriz de la aplicación lineal f respecto de las bases canónicas.

2. (10 puntos)

En una circunferencia de radio R se traza una cuerda de longitud a . Tomando dicha cuerda como diámetro, se traza una semicircunferencia que, con el arco correspondiente a la cuerda, determina una *lúnula* (figura plana cóncava limitada por dos arcos de diferente radio).

- (a) (6 puntos) Determinar el área de dicha lúnula en función del radio R y la longitud de la cuerda a .
- (b) (4 puntos) Demostrar que, para todo triángulo inscrito en una semicircunferencia, se cumple que su área es igual a la suma de las áreas de las dos lúnulas construidas sobre los lados menores del triángulo.

3. (15 puntos)

- (a) (5 puntos) Demostrar que si a es un número natural no nulo y $n > 1$, el número dado por

$$A_n = (1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n)^2 - a^n$$

no es nunca un número primo.

-
- (b) (5 puntos) Demostrar que si $B_n = 2^n - 1$ es un número primo, también lo es el número n , siendo n un número natural.
- (c) (5 puntos) Demostrar que para cualquier número natural n , el número $C_n = 3^{3n+3} - 26n - 27$ es múltiplo de 169.

4. (15 puntos)

En una agencia de viajes se sabe que el 60 % de los clientes realiza un viaje al año, el 30 % realiza dos viajes al año, y el 10 % restante realiza tres viajes o más al año. Se sabe también que un 40 % de clientes tiene hijos y realiza un viaje al año, que un 15 % tiene hijos y realiza dos viajes al año, y que un 1 % tiene hijos y realiza tres viajes o más al año. Se selecciona al azar a un cliente de esta agencia de viajes.

- (a) (8 puntos) Sea A el suceso “el cliente seleccionado no tiene hijos” y B el suceso “el cliente seleccionado realiza menos de tres viajes al año”.
- (a.1) (4 puntos) Calcula la probabilidad de $A \cap B$.
- (a.2) (2 puntos) Calcula la probabilidad de $A \cup B$.
- (a.3) (2 puntos) ¿Son A y B independientes? Indicar qué significa la respuesta en este caso.
- (b) (2 puntos) Si sabemos que el cliente seleccionado realiza dos o más viajes al año, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga hijos?
- (c) (5 puntos) Aplicación didáctica.
- (c.1) (1 punto) Relaciona el concepto de probabilidad con los saberes básicos establecidos en el currículum de la ESO vigente en la Comunidad Valenciana.
- (c.2) (2 puntos) Diseña una actividad manipulativa para la introducción del concepto de probabilidad en un grupo de alumnado de ESO.
- (c.3) (2 puntos) Indicar dos errores frecuentes que suele cometer el alumnado en la aplicación del concepto de probabilidad y aplicar qué estrategia utilizar para evitarlos.